Специальность 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Калинина Инна Сергеевна

Системы функциональных уравнений счетнозначной логики

Научный руководитель
д.ф.-м.н., проф. С. С. Марченков
Кафедра математической кибернетики ВМК МГУ

7 апреля 2015 г.

Диссертация посвящена

- Исследованию систем функциональных уравнений счетнозначной логики и их решений
- Исследованию оператора замыкания, построенному на основе систем функциональных уравнений (оператор FE-замыкания)

Цели диссертации

- Охарактеризовать множества решений систем функциональных уравнений. Найти связь множеств решений с известными классами функций, рассматриваемыми в теории алгоритмов.
- Определить зависимость решений систем функциональных уравнений от функциональных констант, используемых в уравнениях.
- Выяснить влияние дополнительных логических связок на выразительные возможности языка функциональных уравнений.
- Определить сложность поиска решения системы функциональных уравнений (в частности, сложность решения проблемы выполнимости для систем функциональных уравнений).

Цели диссертации

- Разработать технику для описания совокупности всех решений системы уравнений.
- Выяснить возможность применения функциональных уравнений в вопросах классификации функций счетнозначной логики.
- Определить основные характеристики оператора FE-замыкания, основанного на системах функциональных уравнений.

Содержание диссертации

Диссертация состоит из следующих разделов:

- Введения
- Главы 1 “Оператор FE-замыкания в счетнозначной логике”
- Главы 2 “Оценки числа FE-замкнутых и FE-предполных классов”
- Главы 3 “Сложность проблемы выполнимости систем функциональных уравнений”
- Заключения
- Списка литературы

Введение

- Во введении обозначены разделы математики, к которым примыкают исследования, выполненные в настоящей диссертации.
- Приведены разнообразные примеры функциональных уравнений в математике.
- Дан обзор результатов, имеющих отношение к теме диссертации.
- Сформулированы основные цели диссертации.
- Приведено изложение результатов, полученных в диссертации, по главам и параграфам.

Несколько примеров

- Задача Коши

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

- Законы коммутативности и ассоциативности

$$f(x, y) = f(y, x), \qquad f\big(f(x, y), z\big) = f\big(x, f(y, z)\big).$$

- Свойства четности, нечетности и периодичности

$$f(x) = f(-x), \quad f(x) = -f(-x), \quad f(x + T) = f(x).$$

- Самодвойственные булевы функции

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n).$$

Функциональные уравнения

- Пусть $N = \{0, 1, \ldots\}$ (расширенный натуральный ряд)
- P_N — множество всех функций на N (множество функций счетнозначной логики)

Язык функциональных уравнений состоит из:

- передметных переменных $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, принимающих значения из $N = \{0, 1, \ldots\}$;
- функциональных констант $f_1, \ldots, f_k, \ldots$, обозначающих функции из P_N;
- функциональных переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_l, \ldots$ со значеними из P_N;
- знака равенства, скобок и запятой;

Понятие терма

Пусть $Q \subseteq P_N$. Определим понятие терма над Q.

- предметные переменные $x_1, \ldots, x_n$ - термы над Q;
- если $t_1, \ldots, t_n$ — термы над Q, $f_\nu^{(n)}$ есть обозначение функции из Q и $\varphi_i^{(n)}$ — функциональная переменная, то $f_\nu^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ и $\varphi_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ суть термы над Q.

Понятие уравнения, системы уравнений и решения

- Равенством (уравнением) над Q называем любое выражение вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — термы над Q.
- Пусть $\varphi_{i_1}^{(n_1)}, \ldots, \varphi_{i_m}^{(n_m)}$ — все функциональные переменные, входящие в уравнение $t_1 = t_2$. Решением уравнения $t_1 = t_2$ называем систему $\{f_{j_1}^{(n_1)}, \ldots, f_{j_m}^{(n_m)}\}$ функций из P_N, которая после замены каждой переменной $\varphi_{i_s}^{(n_s)}$ соответствующей функциональной константой $f_{j_s}^{(n_s)}$ превращает уравнение $t_1 = t_2$ в тождество.
- Если Ξ — конечная система уравнений, то решением системы уравнений Ξ называем систему функций из P_N, которая является решением каждого уравнения, входящего в систему Ξ.

Понятие FE-замыкания

- Выделим $\varphi_i^{(n)}$ - главную функциональную переменную. Говорим, что множество функций Q определяется системой уравнений Ξ, если Q является множеством всех тех n-местных функций, которые входят в решения системы Ξ в качестве компоненты по переменной $\varphi_i^{(n)}$.
- Замыканием множества Q относительно систем функциональных уравнений (FE-замыканием) называем множество всех функций из P_N, которые определяются как одноэлементные множества системами функциональных уравнений над Q.
- Множество Q называем FE-*замкнутым*, если $Q =$FE$[Q]$.

Оператор FE-замыкания в счетнозначной логике

Первая глава состоит из шести параграфов

- Основные понятия и терминология
- Операторы FE-замыкания и HG-замыкания
- Принцип сопряженности для оператора FE-замыкания
- FE-замыкание множества $\{0, x+1\}$
- FE-замыкание множеств, содержащих характеристическизе функции
- Язык FE-замыкания с логическими связками

Понятие HG-замыкания

В первой главе вводится понятие оператора HG-замыкания.

- Оператор HG-замыкания также основан на системах функциональных уравнений. Этот оператор может быть определен в формализме Эрбрана–Гёделя, изначально предложенного для задания рекурсивных функций.
- Язык оператора HG-замыкания совпадает с языком оператора FE-замыкания. То же самое относится к понятиям терма и равенства (уравнения).
- Получение из системы функциональных уравнений функции-решения сводится к выводу из системы уравнений равенств, определяющих значения функций на всех наборах значений предметных переменных.

Сравнение FE и HG операторов замыкания

Для задания в формализмах FE и HG общерекурсивного оператора $\Phi(f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{(n_m)})$, следует рассмотреть систему равенств Ξ с функциональными константами $0, x+1$, $f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{(n_m)}$. Если $\Phi(f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{(n_m)}) = f$ система равенств Ξ должна корректно определять функцию f через функции $f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{(n_m)}$.

Теорема

Для всякого общерекурсивного оператора $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$ найдется такая система уравнений (в формализме FE) с функциональными константами $0, x+1$ и $f_1, \ldots, f_m$, которая для любого выбора функциональных констант $f_1, \ldots, f_m$ определяет (по своей главной функциональной переменной) функцию $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$.

Понятие однородной функции

- Множество всех функций из P_N, самосопряженных с помощью перестановки π, обозначим через S_π.
- $H = \bigcap\limits_{\pi} S_\pi$, где пересечение рассматривается по всем перестановкам π на множестве N. Функции из множества H носят название *однородных* функций
- Тернарным дискриминатором назовем функцию

$$p(x,y,z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ x & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Принцип сопряженности для оператора FE-замыкания

Утверждение

Пусть система Ξ функциональных уравнений над множеством функций $\{f_1, \dots, f_s\}$ определяет функцию f и π — перестановка на множестве N. Тогда система уравнений Ξ^π, полученная из системы Ξ заменой каждой функциональной константы f_i, $1 \leq i \leq s$, соответствующей функциональной константой f_i^π, определяет функцию f^π.

Теорема

Любой FE-замкнутый класс, содержащий нетривиальную (неселекторную) однородную функцию, целиком включает класс H однородных функций.

FE-замыкание множеств типа $\{x+1\}$

Теорема

FE-*замыкание системы* $\{x+1\}$ *совпадает с классом* Σ_1^1.

Теорема

Пусть $a \in N$ *и* $f(x)$ *— такая функция из класса* Σ_1^1, *что* $\{f^n(a): \ n = 1, 2, \dots\} = N \setminus \{a\}$. *Тогда* FE-*замыкание множества* $\{f(x)\}$ *совпадает с классом* Σ_1^1.

Системы, содержащие характеристические функции

Теорема

- FE-*замыкание каждого из множеств функций* $\{\chi_<\}$, $\{\chi_\leq\}, \{\chi_>\}$, $\{\chi_\geq\}$ *совпадает с классом* Σ^1_1.
- FE-*замыкание множества функций* $\{\chi_=\}$ *содержит класс* H *однородных функций, включается внутрь класса* Σ^1_1 *и не совпадает с классом* Σ^1_1
- FE-*замыкание множества* $\{\chi_=\}$ *совпадает с классом всех функций, самосопряженных относительно любых перестановок с неподвижными точками* $0, 1$.

Понятие языка FE с логическими связками

- Расширим логические возможности языка FE - внесем в язык FE некоторое множество M логических связок. Полученный в результате язык обозначим через FE_M.
- Формулы языка FE_M образуем из элементарных формул (равенств термов) с помощью логических операций из множества M.
- Если множество M совпадает с полной системой логических связок $\&, \vee, \neg$, то полученный в результате язык обозначим через FEC.

Теорема

Имеют место равенства

- $\mathrm{FE}_{\&\vee}[\emptyset] = \mathrm{FE}[p]$
- $\mathrm{FE}_{\&\to}[\emptyset] = \mathrm{FE}[p]$
- $\mathrm{FE}_{\&\sim}[\emptyset] = \mathrm{FE}[p]$
- $\mathrm{FE}_{\&\vee}[\min(x,y)] = \Sigma^1_1$.
- $\mathrm{FE}_{\&\vee}[\max(x,y)] = \Sigma^1_1$.

Теорема

FE*-замыкание множества* $\{p(x,y,z), a_1, \ldots, a_k\}$, *где* $a_1, \ldots, a_k$— *константы, совпадает с классом всех функций, самосопряженных относительно любых перестановок с неподвижными точками* $a_1, \ldots, a_k$.

Оценки числа FE-замкнутых и FE-предполных классов

Вторая глава состоит из двух параграфов:

- FE-замкнутые классы
- FE-предполные классы

Понятие фильта и множества C_F

Фильтром (на N) назовем совокупность F подмножеств множества N, удовлетворяющую двум условиям:

- Если $M_1, M_2 \in F$, то $M_1 \cap M_2 \in F$.
- Если $M_1 \in F$ и $M_1 \subset M_2$, то $M_2 \in F$.

Обозначим через $C(M)$ множество всех функций f, которые являютя самосопряженными относительно любых перестановок, тождественных на $N \setminus M$ и произвольных на M. Если F – фильтр, то пусть

$$C(F) = \bigcup_{M} C(M).$$

Мощность FE-замкнутых классов

Утверждение

- *Для любого фильтра F множество H однородных функций содержится в $C(F)$.*
- *Класс $C(F)$ является* FE*-замкнутым классом.*
- *Для любого фильтра F, не содержащего одноэлементных множеств, множество $C(F)$ отлично от множества P_N.*
- *Если F_1 и F_2 — два различных неглавных фильтра, то $C(F_1) \neq C(F_2)$.*

Теорема

Мощность семейства всех FE*-замкнутых классов гиперконтинуальна.*

Определение FE-предполного класса

Класс функций Q назовем FE-*предполным*, если он FE-замкнут, отличен от P_N и при добавлении любой функции из $P_N \setminus Q$ образует систему, FE-полную в классе P_N.

Теорема

Если фильтр F не содержит одноэлементных множеств, но содержит можество с бесконечным дополнением, то FE-*замкнутый класс функций $C(F)$ можно расширить до* FE-*предполного класса.*

FE-предполные классы

Утверждение

Для любой перестановки $\pi \in \Pi$ *класс* S_π *FE-предполон в* P_N.

Теорема

Мощность семейства FE*-предполных классов не менее чем континуальна.*

Сложность проблемы выполнимости систем функциональных уравнений

Третья глава состоит из трех параграфов:

- Неразрешимость проблемы выполнимости
- Проблема выполнимости и класс Π_1
- Все решения системы функциональных уравнений

Верхняя и нижняя оценка проблемы выполнимости систем с константой p

Проблемой выполнимости для системы функциональных уравнений назовем проблему существования хотя бы одного решения для данной системы уравнений.

Теорема

Проблема выполнимости для систем функциональных уравнений над множеством $\{p(x, y, z)\}$ алгоритмически неразрешима.

Теорема

Проблема выполнимости для систем функциональных уравнений над множеством $\{p(x, y, z)\}$ принадлежит классу Π_1 арифметической иерархии Клини-Мостовского.

Следствия и обобщения для проблемы выполнимости систем с константой p

Следствие

Множество всех выполнимых систем функциональных уравнений над $\{p(x, y, z)\}$ является m-полным множеством в классе Π_1 иерархии Клини-Мостовского.

Следствие

Множество всех выполнимых систем функциональных уравнений над $\{p(x, y, z), a_1, \ldots, a_k\}$, где $a_1, \ldots, a_k$ — константы, является m-полным множеством в классе Π_1 иерархии Клини-Мостовского.

Свойства дерева решений Δ

- Процесс построения дерева Δ является эффективным: существует алгоритм, который по «координате» произвольной вершины дерева Δ определяет, является ли данная вершина «концевой», а если нет, то вычисляет значения функций f_i во всех рассматриваемых точках.
- Если система уравнений Ξ имеет решение, то в дереве Δ существует хотя бы одна бесконечная ветвь.
- Проблема существования бесконечной ветви в дереве Δ выражается формулой $(\forall k)R(k)$, то есть принадлежит классу Π_1 арифметической иерархии Клини-Мостовского.
- Все указанные свойства дерева Δ остаются верны для случая системы над множеством $\{p(x,y,z), a_1, \ldots, a_k\}$, где $a_1, \ldots, a_k$— константы.

Все решения систем над множеством $\{p(x, y, z)\}$

- Зафиксируем нумерацию всех пар термов вида $(\varphi_i(a), \varphi_l(b))$.
- Пусть $\beta = \beta_0\beta_1\dots$ - двоичная последовательность (возможно, с пропусками), в которой $\beta_t = 1$, если в паре с номером t - $\varphi_i(a) = \varphi_l(b)$.
- Пусть F_β - множество всех наборов функций $(g_1, \dots, g_r)$, для которой двоичная последовательность, построенная для набора функций $(g_1, \dots, g_r)$, совпадает с последовательностью β (всюду кроме пропусков).

Все решения систем над множеством $\{p(x, y, z)\}$

Следствие

Множество всех решений ситемы функциональных уравнений над $\{p(x, y, z)\}$ содержится внутри объединения всех множеств F_β, где последовательности β построены для различных бесконечных ветвей дерева Δ.

На защиту выносятся следующие результаты

- Для всякого общерекурсивного оператора $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$ найдется такая система уравнений (в формализме FE) с функциональными константами $0, x+1$ и $f_1, \ldots, f_m$, которая для любого выбора функциональных констант $f_1, \ldots, f_m$ определяет (по своей главной функциональной переменной) функцию $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$.
- Любой FE-замкнутый класс, содержащий нетривиальную однородную функцию, целиком включает класс H однородных функций.
- FE-замыкание систем, подобных системам $\{x+1\}$ и $\{\chi_<\}$ совпадает с классом Σ_1^1 аналитической иерархии Клини.

На защиту выносятся следующие результаты

- Имеют место равенства $\mathrm{FE}_{\&\vee}[\emptyset] = \mathrm{FE}_{\rightarrow\&}[\emptyset] = \mathrm{FE}_{\sim\&}[\emptyset] = \mathrm{FE}[p]$. Классы $\mathrm{FE}_{\&\vee}[\min]$ и $\mathrm{FE}_{\&\vee}[\max]$ совпадают с классом Σ^1_1.
- FE-замыкание множества $\{p(x,y,z), a_1, \ldots, a_k\}$, где p — тернарный дискриминатор, а $a_1, \ldots, a_k$ — константы, совпадает с классом всех функций, самосопряженных относительно любых перестановок с неподвижными точками $a_1, \ldots, a_k$.

На защиту выносятся следующие результаты

- Проблема выполнимости для систем функциональных уравнений с функциональной константой p алгоритмически неразрешима; множество всех выполнимых систем функциональных уравнений над $\{p\}$ является m-полным множеством в классе Π_1 иерархии Клини-Мостовского.
- Множество всех решений системы функциональных уравнений над $\{p\}$ содержится внутри объединения всех множеств вида F_β, где последовательности β построены для различных бесконечных ветвей дерева решений данной системы уравнений.
- Мощность семейства всех FE-замкнутых классов гиперконтинуальна. Мощность семейства FE-предполных классов не менее чем континуальна.

Публикации автора по теме диссертации в журналах из списка ВАК

- Марченков С. С., Калинина И. С. Оператор FE-замыкания в счетнозначной логике // Вестник Московского ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернет. 2013. № 3. С. 42–47.
- Калинина И.С. О действии оператора FE-замыкания на множестве функций счетнозначной логики // Вестник Московского ун-та. Серия 15. Вычислит. матем. и кибернет. 2014. № 3. С. 46-51

Публикации автора по теме диссертации в журналах из списка ВАК

- Калинина И.С., Марченков С.С. О сложности проблемы выполнимости для систем функциональных уравнений счетнозначной логики // Известия вузов. Математика, 2015. №8, С.
- Калинина И.С. О некоторых свойствах оператора FE-замыкания в счетнозначной логике // Вестник Пензенского ун-та. 2014. № 3. С. 37-46

Публикации автора по теме диссертации в тезисах конференций

- Конференция Ломоносовские чтения
- Калинина И. С. Проблема выполнимости для систем функциональных счетнозначной логики// Научная конференция "Тихоновские чтения", Тезисы докладов, 27-31 октября 2014 г. С. 45-46

Спасибо за внимание !